

第3讲 二次函数图象专题（二）

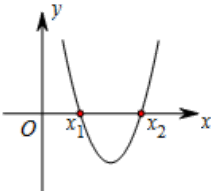
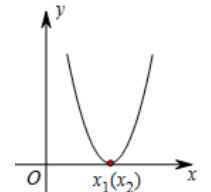
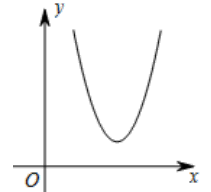
一、二次函数与方程综合

知识回顾：

求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的交点：

令 $y = 0$ ，得到一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，此一元二次方程的解就是抛物线与 x 轴交点的横坐标值。

因此：二次函数图象与 x 轴的交点情况决定一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况。

判别式	图象	与 x 轴的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点 $(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ $(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$	有 <u>两个不相等</u> 的实数根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$		只有 <u>一</u> 个交点 $(-\frac{b}{2a}, 0)$	有 <u>两个相等</u> 的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$		<u>无</u> 交点	<u>无</u> 实数根

！注意：

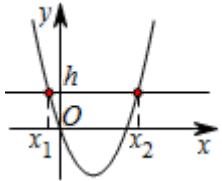
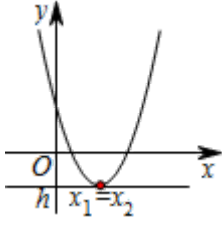
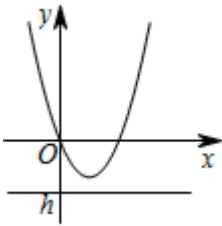
当 $\Delta > 0$ 时，与 x 轴两个交点的距离为 $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

思考：

求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点：

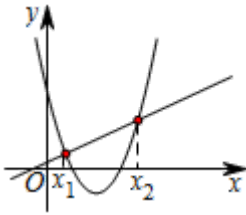
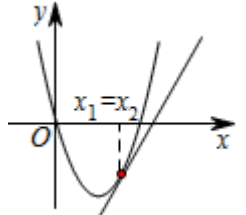
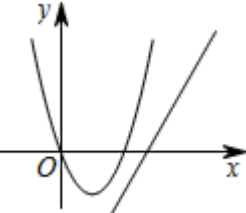
令 $y = h$ ，得到一元二次方程 $ax^2 + bx + c - h = 0$ ，此一元二次方程的解就是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点的横坐标值。

因此，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点情况决定一元二次方程 $ax^2 + bx + c - h = 0$ 根的情况。

判别式	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点	有 <u>两个不相等</u> 的实数根
$\Delta = 0$		有 <u>一</u> 个交点	有 <u>两个相等</u> 的实数根
$\Delta < 0$		<u>无</u> 交点	<u>无</u> 实数根

求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点：

联立 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$ ，得到一元二次方程 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ ，此方程的解即是两个函数交点的 横 坐标值，再将横坐标代入任意一个解析式求交点的纵坐标。

判别式	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有 <u>两</u> 个交点	有 <u>两个不相等</u> 的实数根
$\Delta = 0$		有 <u>一</u> 个交点	有 <u>两个相等</u> 的实数根
$\Delta < 0$		<u>无</u> 交点	<u>无</u> 实数根

【备注】 二次函数与方程这部分重点在于：根据方程的形式转化为相应的函数图象，利用数形结合的思想求方程的解。

🍎 举个“栗子”

栗子1

1. 2021年天津和平区初三中考一模第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过点 $(1, 0)$, $(0, -1)$, 其对称轴在 y 轴右侧.

有下列结论:

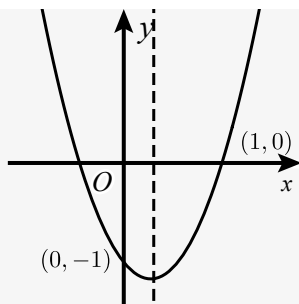
- ① $a - b - 1 = 0$;
- ② 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为 1, 另一个根为 $-\frac{1}{a}$;
- ③ $a > 1$.

其中, 正确结论的个数为 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 C

【解析】



将 $(0, -1)$ 代入得： $-1 = c$ ，

$\therefore c = -1$ ，

$\therefore y = ax^2 + bx - 1$ ，将 $(1, 0)$ 代入得

$$a + b - 1 = 0, \quad a + b = 1,$$

$$b = 1 - a, \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1-a}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a},$$

$$a > 0 \text{ 且 } \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > 0,$$

$\therefore$ 对称轴在 $0 < x < \frac{1}{2}$ 范围内 $x = 0$ 时，即 $y = ax^2 + bx - 1$ 关于 $x = 0$ 对称时才过 $(-1, 0)$

,

$\therefore x = -1$ 时， $a - b - 1 = 0$ ，但与对称轴在 y 轴右侧矛盾，故①错误；

令 $y = ax^2 + (1-a)x - 1$ 中， $x = -\frac{1}{a}$ 时，

$$y = a \times \frac{1}{a^2} + (1-a) \times \left(-\frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + 1 - 1 = 0, \quad (\text{不用解，代入 } x = -\frac{1}{a} \text{ 看 } y \text{ 是}$$

否为 0 即可)，

$\therefore$ 另一个根为 $-\frac{1}{a}$ 成立，故②正确；

由对称轴在 y 轴右侧得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > 0$ ， $\frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$ ， $a > 1$ ，故③正确；

故正确结论为 2 个，故选 C。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子2

2. 2021年天津武清区初三中考二模（部分区统考）第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = (m+1)x^2 - 2mx + m - 2$ 与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$ ， $(x_2, 0)$ 。现有如下结论：①此抛物线过定点 $(1, -1)$ ；②若抛物线开口向下，则 m 的取值范围是 $-2 < m < -1$ ；③若 $m > -1$ 时，有 $-2 < x_1 < -1$ ， $1 < x_2 < 2$ ，则 m 的取值范围是 $-\frac{2}{9} < m < \frac{1}{4}$ 。其中正确结论的个数是（ ）。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【备注】由 x 轴交点的范围，分析特殊值的正负

【答案】D

【解析】①将 $x = 1$ 代入得 $y = m + 1 - 2m + m - 2 = -1$ ，

∴过点 $(1, -1)$, 正确 .

②抛物线开口向下 : $m + 1 < 0$,

∴ $m < -1$,

抛物线与 x 轴有两个交点 , $(-2m)^2 - 4(m+1)(m-2) > 0$,

即 : $4m^2 - 4m^2 + 4m + 8 > 0$, $4m > -8$, $m > -2$,

∴ $-2 < m < -1$, 正确 .

③∵ $-2 < x_1 < -1$, $m > -1$, 抛物线开口向上 ,

∴ $\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 9m + 2 > 0 \\ 4m - 1 < 0 \end{cases}$,

∴ $\begin{cases} m > -\frac{2}{9} \\ m < \frac{1}{4} \end{cases}$.

∴ $-\frac{2}{9} < m < \frac{1}{4}$, 正确 .

综上 , ①②③均正确 .

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

栗子3

3. 2019~2020学年天津南开区初三上学期期中 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数 , $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表 :

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	t	m	-2	-2	n	...

且当 $x = -\frac{1}{2}$ 时 , 与其对应的函数值 $y > 0$. 有下列结论 :

① $abc > 0$; ② -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根 ; ③ $0 < m + n < \frac{20}{3}$.

其中 , 正确结论的个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】 解 : 当 $x = 0$ 时 , $c = -2$,

当 $x = 1$ 时 , $a + b - 2 = -2$,

∴ $a + b = 0$,

∴ $y = ax^2 - ax - 2$,

∴ $abc > 0$,

①正确 ;

直线 $x = \frac{1}{2}$ 是对称轴 ,

当 $x = -2$ 时, $y = t$, 则 $x = 3$ 时, $y = t$,
 $\therefore -2$ 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根;

②正确;

$$m = a + a - 2, n = 4a - 2a - 2,$$

$$\therefore m = n = 2a - 2,$$

$$\therefore m + n = 4a - 4,$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, } y > 0,$$

$$\therefore a > \frac{8}{3},$$

$$\therefore m + n > \frac{20}{3},$$

③错误;

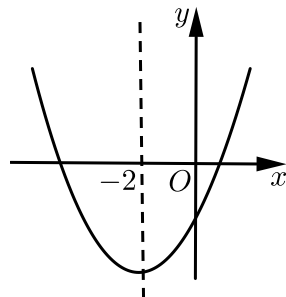
故选: C.

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

4. 2020~2021 学年天津河东区初三上学期期中 (第三学区片) 第12题 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论:

① $abc > 0$; ② $4a + 2b + c > 0$; ③ $5a - b + c = 0$; ④若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ⑤若方程 $|ax^2 + bx + c| = 2$ 有四个根, 则这四个根的和为 -4 , 其中正确的结论有 () .



A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】 A

【解析】 $\because$ 抛物线的开口向上, 则 $a > 0$, 对称轴在 y 轴的左侧, 则 $b > 0$, 交 y 轴的负半轴, 则 $c < 0$,

$\therefore abc < 0$, 所以①结论错误;

$\because$ 抛物线的顶点坐标 $(-2, -9a)$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -2, \frac{4ac - b^2}{4a} = -9a,$$

$$\therefore b = 4a, c = -5a,$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4ax - 5a$,

$\therefore 4a + 2b + c = 4a + 8a - 5a = 7a > 0$, 所以②结论正确 ;

$5a - b + c = 5a - 4a - 5a = -4a < 0$, 故③结论错误 ;

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + 4ax - 5a$ 交 x 轴于 $(-5, 0)$, $(1, 0)$,

$\therefore$ 若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$, 正确 , 故结论④正确 ;

若方程 $|ax^2 + bx + c| = 1$ 有四个根 , 设方程 $ax^2 + bx + c = 1$ 的两根分别为 x_1 , x_2

则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -2$, 可得 $x_1 + x_2 = -4$,

设方程 $ax^2 + bx + c = 1$ 的两根分别为 x_3 , x_4 ,

则 $\frac{x_3 + x_4}{2} = -2$, 可得 $x_3 + x_4 = -4$,

所以这四个根的和为 -8 , 故结论⑤错误 .

故选 A .

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

栗子4

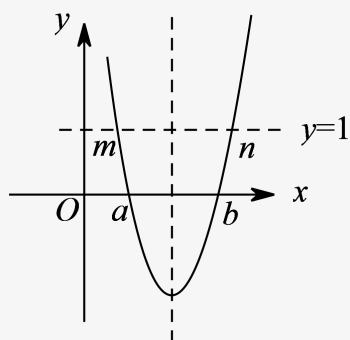
5. 2017~2018学年10月天津和平区天津市双菱中学初三上学期月考第11题 ★★★

已知二次函数 $y = 1 - (x-a)(x-b)$, 其中 $a < b$, m 、 n ($m < n$) 是方程 $1 - (x-a)(x-b) = 0$ 的两个根 , 则实数 a 、 b 、 m 、 n 的大小关系是 () .

- A. $a < m < n < b$ B. $m < a < b < n$ C. $a < m < b < n$ D. $m < a < n < b$

【答案】 B

【解析】 依题意 , 画出函数 $y = (x-a)(x-b)$ 的图象 .



函数图象为抛物线 , 开口向上 , 与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 a , b ($a < b$)

方程 $1 - (x-a)(x-b) = 0$ 转化为 $(x-a)(x-b) = 1$,

方程的两根是抛物线 $y = (x-a)(x-b)$ 与 $y = 1$ 的两个交点 .

由 $m < n$, 可知对称轴左侧交点横坐标为 m , 右侧为 n .

由抛物线开口向上 , 且在对称轴左侧 , y 随 x 增大而减少 , 则有 $m < a$

在对称轴右侧， y 随 x 增大而增大，则有 $b < n$ 。

综上， $m < a < b < n$ 。

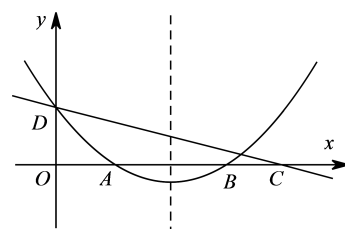
【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

栗子5

6. 2017~2018学年天津南开区初三上学期期中第12题3分 ★★★★★

如图，直线 $y = kx + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象都经过 y 轴上的 D 点，抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点，其对称轴为直线 $x = 1$ ，且 $OA = OD$ 。直线 $y = kx + c$ 与 x 轴交于点 C （点 C 在点 B 的右侧）。则下列命题中正确命题的个数是（ ）。

① $abc > 0$ ；② $3a + b > 0$ ；③ $-1 < k < 0$ ；④ $k > a + b$ ；⑤ $ac + k > 0$ 。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】∵ 抛物线开口向上，

∴ $a > 0$ 。

∵ 抛物线对称轴是 $x = 1$ ，

∴ $b < 0$ 且 $b = -2a$ 。

∵ 抛物线与 y 轴交于正半轴，

∴ $c > 0$ 。

∴ ① $abc > 0$ 错误。

② $3a + b > 0$ 正确，

∵ 直线 $y = kx + c$ 经过一、二、四象限，

∴ $k < 0$ 。

∵ $OA = OD$ ，

∴ 点 A 的坐标为 $(c, 0)$ 。

直线 $y = kx + c$ 当 $x = c$ 时， $y > 0$ ，

∴ $kc + c > 0$ 可得 $k > -1$ 。

∴ ③ $-1 < k < 0$ 正确。

∵ 直线 $y = kx + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象有两个交点，

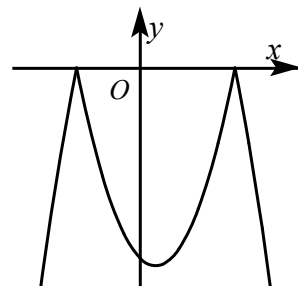
$$\begin{aligned}
&\therefore ax^2 + bx + c = kx + c, \\
&\text{得 } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{k-b}{a}. \\
&\text{由图象知 } x_2 > 1, \\
&\therefore \frac{k-b}{a} > 1, \\
&\therefore k > a + b. \\
&\therefore \textcircled{4} k > a + b \text{ 正确}, \\
&\therefore \begin{cases} 2a + b = 0 \\ c(ac + b + 1) = 0 \end{cases} \\
&\therefore 2a - ac = 1. \\
&\therefore ac = 2a - 1. \\
&\therefore -1 < k < 0, \\
&\therefore \textcircled{5} \text{ 令 } ax^2 + bx + c = kx + c, \\
&\therefore ax + b = k, \\
&\therefore b = -2a, \\
&\therefore x = \frac{k+2a}{a}. \\
&\therefore \text{交点在 } B(2-c, 0) \text{ 右边}, \\
&\therefore \frac{k+2a}{a} > 2-c, \\
&\therefore k+2a > 2a-ac, \\
&\therefore ac+k > 0, \text{ 故正确}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

栗子6

7. 2020年天津和平区初三中考三模第12题3分 ★★★

已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = 2x - m$ ，将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方，图象的其余部分不变，得到一个新函数的图象（如图所示），当直线 $y = 2x - m$ 与新函数图象有 4 个交点时， m 的取值范围是（ ）。

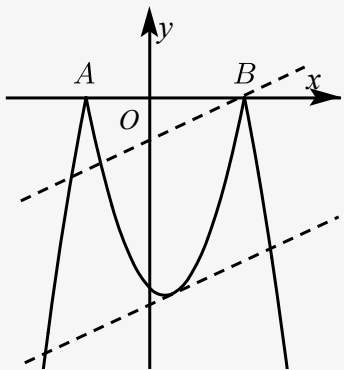


- A. $-4 < m < 6$ B. $-\frac{25}{4} < m < -4$ C. $6 < m < \frac{33}{4}$ D. $-\frac{25}{4} < m < 6$

【备注】一次函数与二次函数交点情况讨论

【答案】 C

【解析】 如图所示, 当 $y = 0$ 时, $-x^2 + x + 6 = 0$,



解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 3$,

则 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$,

将该二次函数在 x 轴上方图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方部分图象解析式为

$$y = (x + 2)(x - 3) \text{ 即 } y = x^2 - x - 6 (-2 \leq x \leq 3).$$

当直线 $y = 2x - m$ 经过 B 点时,

$$6 - m = 0, \text{ 得 } m = 6,$$

当直线 $y = 2x - m$ 与抛物线 $y = x^2 - x - 6 (-2 \leq x \leq 3)$ 有唯一公共点时,

即 $x^2 - x - 6 = 2x - m$ 有相等实数根,

$$\text{即 } x^2 - 3x + m - 6 = 0,$$

$$\text{令 } \Delta = 9 - 4(m - 6) = 0,$$

$$\text{得 } m = \frac{33}{4},$$

故当有 4 个交点时,

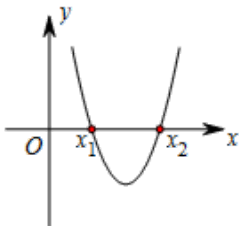
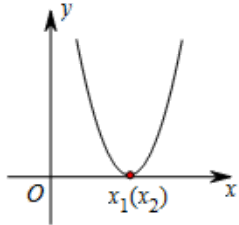
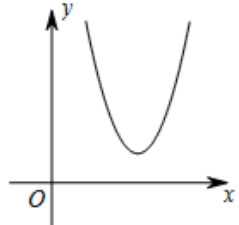
$$\text{由图象知: } 6 < m < \frac{33}{4}.$$

故选 C.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

二、 二次函数与不等式综合

1. $ax^2 + bx + c > 0$ 型不等式

图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
	有 <u>两</u> 个交点	<u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>	<u>$x_1 < x < x_2$</u>
	有 <u>一</u> 个交点	<u>$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)</u>	<u>无解</u>
	<u>无</u> 交点	<u>全体实数</u>	<u>无解</u>

2. 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y_2 = mx + n (m > 0)$ 的不等关系：

图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有 <u>两</u> 个交点	<u>$x < x_1$ 或 $x > x_2$</u>	<u>$x_1 < x < x_2$</u>
	有 <u>一</u> 个交点	<u>$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)</u>	<u>无解</u>
	<u>无</u> 交点	<u>全体实数</u>	<u>无解</u>

栗子7

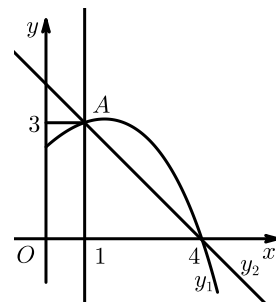
直接比较一次与二次函数大小

8. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期末第12题3分 ★★★

如图是抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的一部分，抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$ ，与 x 轴的一个交点为 $B(4, 0)$ ，直线 $y_2 = mx + n (m \neq 0)$ 与抛物线交于 A 、 B 两点，结合图象分析下列结论：

- ① $2a + b = 0$ ；
- ② $abc > 0$ ；
- ③ 方程 $ax^2 + bx + c = 3$ 有两个相等的实数根，
- ④ 当 $1 < x < 4$ 时，有 $y_2 < y_1$ ；
- ⑤ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(-1, 0)$ ，

其中正确的是 () 。



A. ①②③

B. ②④

C. ①③④

D. ①③⑤

【答案】 C

【解析】 $\because$ 抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$,

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore 2a + b = 0,$$

所以①正确;

$\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore b = -2a > 0,$$

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$$\therefore c > 0,$$

$$\therefore abc < 0,$$

所以②错误;

$\because$ 抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$,

$\therefore x = 1$ 时, 二次函数有最大值,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 3$ 有两个相等的实数根,

所以③正确;

$\because$ 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y_2 = mx + n (m \neq 0)$ 交于 $A(1, 3)$, B 点 $(4, 0)$,

$\therefore$ 当 $1 < x < 4$ 时, $y_2 < y_1$,

所以④正确;

$\because$ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(4, 0)$,

而抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-2, 0)$,

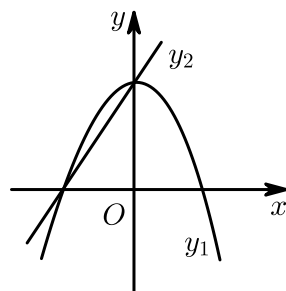
所以⑤错误;

故选: C.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数图象的综合判断

9. 2017年天津和平区初三中考二模第12题3分 ★★★

如图, 已知抛物线 $y_1 = -2x^2 + 2$, 直线 $y_2 = 2x + 2$, 当 x 任取一值时, x 对应的函数值分别为 y_1 , y_2 , 若 $y_1 \neq y_2$, 取 y_1 , y_2 中的较小的值记为 M , 若 $y_1 = y_2$, 记 $M = y_1 = y_2$, 例如: 当 $x = 1$ 时, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_1 < y_2$, 此时 $M = 0$, 下列判断: ①当 $x > 0$ 时, $y_1 > y_2$; ②当 $x < 0$ 时, x 值越大, M 值越小; ③使得 M 大于 2 的 x 值不存在; ④使得 $M = 1$ 的 x 值是 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中正确的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 ①当 $x > 0$ 时，由图可知，直线的图像在抛物线上方，即 $y_2 > y_1$ ， $\therefore$ 不正确，

②当 $x < 0$ 时，设抛物线和直线的交点的坐标分别为 (a_1, b_1) ， (a_2, b_2) ，

令 $y_1 = y_2$ ，解得交点坐标为 $(0, 2)$ ， $(-1, 0)$ ，

由图可知，当 $-1 < x < 0$ 时，抛物线在直线上方，

即 $y_1 > y_2$ ，则 $M = y_2$ ，当 x 越大， M 的值越大，

当 $x < -1$ 时，则 $M = y_1$ ，当 x 越大， M 值越大， $\therefore$ 不正确，

③由以上分析可知，当 $x \geq 0$ 时， $y_2 > y_1$ ，

即 $M = y_1$ ，此时 $y_1 \leq 2$ ，故 $M \leq 2$ ，

当 $-1 < x < 0$ 时， $M = y_2$ ，解得 $0 < M < 2$ ，

当 $x \leq -1$ 时， $M = y_1$ ，解得 $M \leq 0$ ， $\therefore$ 正确，

④由③推断出的 M 的范围分析出的 $M = 1$ 有两种情况，

情况一：当 $x \geq 0$ 时， $M = y_1$ ，若 $M = 1$ ，解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

情况二：当 $-1 < x < 0$ 时， $M = y_2$ ，若 $M = 1$ ，解得 $x = -\frac{1}{2}$ ， $\therefore$ 正确。

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

栗子8

将不等式变形比较大小

10. 2018~2019学年天津河东区初三上学期中第11题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

给出了结论：

(1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值，最大值为 5；(2) $ac < 0$ ；(3) $x > 1$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小；(4) 3 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根；(5) 当 $-1 < x < 3$ 时， $ax^2 + (b-1)x + c > 0$ 。则其中正确结论的个数是 ()。

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B**【解析】** $\because x = -1$ 时 $y = -1$, $x = 0$ 时 $y = 3$, $x = 1$ 时 $y = 5$.

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 3 \\ a + b + c = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\therefore y = -x^2 + 3x + 3 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{21}{4}.$$

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, y 有最大值, 为 $\frac{21}{4}$, ①错误.

$ac = -1 \times 3 < 0$, ②正确.

对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$, 所以, 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, y 随 x 的增大而减小, ③错误.

方程为 $-x^2 + 2x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, 所以 3 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根, ④正确.

$$\because x = -1 \text{ 时, } ax^2 + bx + c = -1.$$

$$\because x = -1 \text{ 时, } ax^2 + (b-1)x + c = 0.$$

$$\because x = 3 \text{ 时, } ax^2 + (b-1)x + c = 0, \text{ 且函数有最大值.}$$

$$\therefore \text{当 } -1 < x < 3 \text{ 时, } ax^2 + (b-1)x + c > 0, \text{ ⑤正确.}$$

综上, 正确的有②④⑤, 共 3 个.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

栗子9

11. 2021年天津和平区初三中考二模第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$, 且与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 其中点 A 在点 $(3, 0)$ 的右侧, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + c$ 经过 A, B 两点.

有下列结论:

$$\text{① } c > \frac{3}{2};$$

$$\text{② } 2a + 2b + c > 0;$$

$$\text{③ } -\frac{1}{2} < a < 0.$$

其中正确的结论是 ().

A. ①

B. ①②

C. ②③

D. ①②③

【备注】画出函数图象后, 需要代入特殊点比较两个特殊值的大小关系**【答案】** D

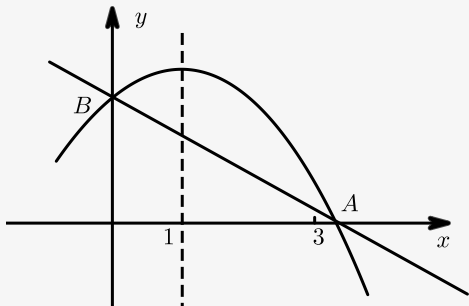
【解析】∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 对称轴 $x = 1$,

且与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点, 点 D 在 $(3, 0)$ 右侧,

直线 $y = -\frac{1}{2}x + c$ 经过 A 、 B 两点,

∴ 画简图如图, 把 $x = 3$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + c$ 中得 $-\frac{3}{2} + c > 0$,

∴ $c > \frac{3}{2}$, 故①正确;



把 $x = 3$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中,

$$9a + 3b + c > -\frac{3}{2} + c ,$$

$$9a + 3b > -\frac{3}{2} ,$$

$$\because \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a ,$$

$$\therefore 9a - 6a > -\frac{3}{2} ,$$

$$\therefore a > -\frac{1}{2} ,$$

∴ 开口向下,

$$\therefore a < 0 ,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < 0 , \text{ 故③正确} ,$$

$$\because a < 0 , c > 0 ,$$

$$\therefore 2a + 2b + c = 2a - 4a + c = -2a + c > 0 , \text{ 故②正确} ,$$

综上①②③正确.

故选 D .

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

三、二次函数其它综合

1. 二次函数恒过定点问题

已知抛物线解析式为 $y = mx^2 - 2mx + 3$, 整理二次函数为 $y = mx(x - 2) + 3$, 则可得到此函数一定经过定点 $(0, 3)$ 和 $(2, 3)$.

【备注】恒过定点问题可转化为与谁无关问题: 与谁无关就让谁的系数为零 (即提取参数后, 让参

数的系数为 0)

栗子10

12. 2019年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★

已知抛物线 $y = x^2 + 2mx - 3m$ (m 是常数), 且无论 m 取何值, 该抛物线都经过某定点 H , 则点 H 的坐标为 ().

- A. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】 $y = x^2 + 2mx - 3m$,

$$= m(2x - 3) + x^2.$$

当 $2x - 3 = 0$ 即 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = \frac{9}{4}$,

$\therefore H$ 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

故选 C.

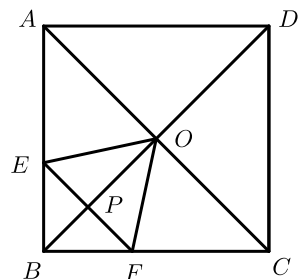
【标注】 【知识点】 二次函数与定点问题

2. 二次函数与几何综合

栗子11

13. 2021年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★★

在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , P 是 BD 上一动点, 过 P 作 $EF \parallel AC$, 分别交正方形的两条边于点 E, F . 设 $BP = x$, $\triangle OEF$ 的面积为 y , 当 $1 < x < 2$ 时, y 与 x 之间的关系式为 ().



- A. $y = -x^2 + x$ B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$ C. $y = -x^2 + 3x - 2$ D. $y = x^2 - 3x + 2$

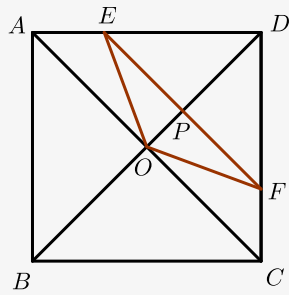
【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AC = BD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ (正方形性质) ,

$BO = OD = 1$, $\angle DAC = \angle DCA = 45^\circ$,

$\therefore$ 当 $1 < x < 2$ 时 , P 点位于线段 OD 上 , (如图) , $BP = x$,



则 $OP = BP - BO = x - 1$,

$\therefore EF \parallel AC$,

$\therefore \frac{DF}{DC} = \frac{DP}{OD}$ (相似比) ,

其中 : $PD = BD - BP = 2 - x$,

即 : $\frac{DF}{\sqrt{2}} = \frac{2-x}{1}$,

$\therefore DF = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x$,

$\therefore EF \parallel AC$,

$\therefore \angle DEF = \angle DAC = 45^\circ$, $\angle DFE = \angle DCA = 45^\circ$ (两直线平行 , 同位角相等) ,

$\therefore \triangle DEF$ 为等腰直角三角形 ,

$\therefore EF = \sqrt{2}DF = 4 - 2x$,

$S_{\triangle OEF} = \frac{1}{2} \times OP \times EF = \frac{1}{2} (x-1) \times (4-2x) = -x^2 + 3x - 2$,

即 $y = -x^2 + 3x - 2$ ($1 < x < 2$) .

故选 C .

【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题